

N2涡卷超混沌吸引子产生与同步的研究

禹思敏¹, 丘水生²

(11 广东工业大学自动化学院, 广东广州 510090; 21 华南理工大学电子与信息学院, 广东广州 510640)

摘要: 四阶 MCK 电路的主要特点是产生双涡卷超混沌吸引子. 本文提出在该电路中产生 N2 涡卷超混沌吸引子的一种新方法. 构造一个具有 $2N - 1$ 个分段线性的奇函数, 其构造方法是使该函数中的每一个平衡点分别位于相邻两个转折点的正中间, 并保持混沌吸引子中涡卷与键带的相互间置, 在此基础上利用递推的方法求得该函数中的各个递推参数, 从而可在 MCK 电路中产生 N2 涡卷超混沌吸引子. 基于李雅普诺夫稳定性理论, 研究了两个 N2 涡卷超混沌吸引子的单向耦合同步问题. 最后给出了 N2 涡卷超混沌吸引子产生及其同步的计算机数值模拟结果.

关键词: 四阶 MCK 电路; N2 涡卷超混沌吸引子; N2 涡卷超混沌吸引子单向耦合同步

中图分类号: TN901 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 05-0814-05

Study on Generation and Synchronization of N2 Scroll Hyperchaotic Attractors

YU Si-min¹, QIU Shui-sheng²

(11 College of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510090, China;

21 College of Electronic & Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

Abstract: The feature of the MCK circuit is that it can generate double scroll hyperchaotic attractor. This paper presents a new approach for generating N2 scroll hyperchaotic attractors in the MCK circuit. A $2N - 1$ segment piecewise linear odd function is constructed in the presented scheme. The construction method is used to make each equilibrium point located in the center of two adjacent breakpoints, and keep scrolls and bond orbits alternated with each other. Using the recurrence formula, the recurrence parameters of the $2N - 1$ segment piecewise linear odd function can be determined so as to obtain N2 scroll hyperchaotic attractors. Based on Lyapunov stability theory, the synchronization of N2 scroll hyperchaotic attractors is studied. Finally, the results of generation and synchronization of N2 scroll hyperchaotic attractors are given.

Key words: fourth order MCK circuit; N2 scroll hyperchaotic attractors; unidirectionally coupled synchronization of N2 scroll hyperchaotic attractors

1 引言

近年来,混沌及其同步问题受到了国内外广泛的重视和关注,已成为信息科学领域的一个热门课题^[1~4].有关非线性电路中混沌机理及其同步问题的研究已取得了一系列进展,蔡氏电路是其中的成果之一,主要特点是能产生双涡卷混沌吸引子,其混沌动力学行为已分别被数学分析、数值模拟和硬件实验所证实,并且在 Shil'nikov 定理的基础上得到了严格的数学证明,成为了研究混沌动态的一个范例^[5].在此基础上,人们还进一步研究了在三阶蔡氏电路中产生多涡卷混沌吸引子的问题,主要方法是利用多个分段线性函数^[6~8]和正弦函数^[9]来产生多涡卷混沌吸引子.而在四阶系统中,变型蔡氏电

路^[10]和 MCK 电路^[11](由 Matsumoto、Chua、Kobayashi 三位学者提出,简称 MCK 电路)则是产生双涡卷混沌与超混沌吸引子的两种典型电路.

在文献[8, 11]的基础上,本文进一步研究了四阶系统中多涡卷超混沌吸引子的产生规律及其单向耦合同步问题,报道有关这方面的一些新的研究成果.首先,我们提出了在四阶 MCK 电路中产生 N2 涡卷超混沌吸引子的一种新方法,利用文中理论分析所得的一组递推公式和计算所得的各个递推参数,构造一个具有 $2N - 1$ 个分段线性的奇函数,从而能在 MCK 电路中产生 N2 涡卷超混沌吸引子($N = 3, 4, 5, \dots$);其次分析了有关 N2 涡卷超混沌吸引子的单向耦合同步问题;最后通过计算机数值模拟证实了这一方法的可行性.

收稿日期: 2003-06-04; 修改日期: 2003-12-29

基金项目: 广东省自然科学基金(No. 032469); 国家自然科学基金(No. 60372004); 教育部高等学校博士点学科基金(No. 00056107); 广东省教育厅自然科学基金项目(No. 010042)

2 递推公式的导出

根据文献[11]所提出的四阶 MCK 电路,其无量纲归一化状态方程为

$$\begin{cases} dx/dS = A[g(y-x) - z] \\ dy/dS = B[-g(y-x) - w] \\ dz/dS = x + z \\ dw/dS = Cy \end{cases} \quad (1)$$

式中 $g(y-x) = m_1(y-x) + 0.5(m_0 - m_1)[|y-x+x_1| - |y-x-x_1|]$ 为三个分段线性奇函数, $A = 2, B = 20, C = 11.5, m_0 = -0.2, m_1 = 3$. 李氏指数谱为 $[L_1, L_2, L_3, L_4] = [0.24, 0.06, 0.00, -531.8]$, 可产生一个双涡卷超混沌吸引子, 如图 1 所示.

在此基础上, 构造一个具有 $2N-1$ 个分段线性函数来产生 N_2 涡卷超混沌吸引子 ($N = 3, 4, \dots$)

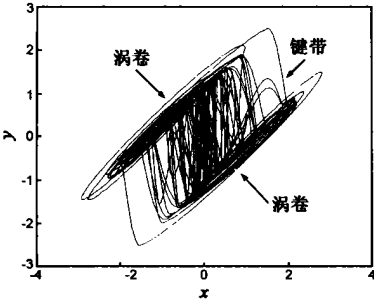


图 1 双涡卷超混沌吸引子

$g(y-x) = m_{N-1}(y-x) + 0.5 \sum_{i=1}^{N-1} (m_i - m_0) \#(|y-x+x_i| - |y-x-x_i|) =$

$$\begin{cases} m_0(y-x), & |y-x| \leq x_1 \\ m_i(y-x) + \sum_{j=1}^i (m_j - m_0) x_j \frac{|y-x|}{y-x}, & x_i \leq |y-x| \leq x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-2 \\ m_{N-1}(y-x) + \sum_{j=1}^{N-1} (m_j - m_0) x_j \frac{|y-x|}{y-x}, & |y-x| > x_{N-1} \end{cases} \quad (2)$$

式中 $m_i (i = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ 为 $g(\#)$ 中各个线性区间的斜率, $x_i (i = 2, 3, \dots, N-1)$ 为 $g(\#)$ 的各个转折点值. 式(2)代入式(1), 经推导, 可得关于变量 x 的平衡点 $x_{eq, i} (i = 1, 2, \dots, N-1)$ 方程为

$$\begin{cases} x_{eq, 1} = \frac{\sum_{i=1}^1 (m_i - m_0) x_i}{m_1 - m_0}, & x_{eq, 2} = \frac{\sum_{i=1}^2 (m_i - m_0) x_i}{m_2 - m_0} \\ \dots, & \dots \\ x_{eq, N-2} = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} (m_i - m_0) x_i}{m_{N-2} - m_0}, & x_{eq, N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (m_i - m_0) x_i}{m_{N-1} - m_0} \end{cases} \quad (3)$$

为了求得式(2)中各个转折点 $x_i (i = 2, 3, \dots, N-1)$ 的值, 需引入一组新的参数值 $k_i (i = 1, 2, \dots, N-2)$ 来确定各个平衡点 $x_{eq, i} (i = 1, 2, \dots, N-1)$ 与各个转折点 $x_i (i = 2, 3, \dots, N-1)$ 之间距离的比值

$$\begin{cases} \frac{x_2 - x_{eq, 1}}{x_{eq, 1} - x_1} = k_1, & \frac{x_3 - x_{eq, 2}}{x_{eq, 2} - x_2} = k_2, \\ \dots, & \dots \\ \frac{x_{N-2} - x_{eq, N-3}}{x_{eq, N-3} - x_{N-3}} = k_{N-3}, & \frac{x_{N-1} - x_{eq, N-2}}{x_{eq, N-2} - x_{N-2}} = k_{N-2} \end{cases} \quad (4)$$

将式(3)代入式(4), 最后得关于转折点 $x_i (i = 2, 3, \dots, N-1)$ 的递推公式为

$$\begin{cases} x_2 = \frac{(1+k_1) \sum_{i=1}^1 (m_i - m_{i-1}) x_i}{m_1 - 1} - k_1 x_1, \\ x_3 = \frac{(1+k_2) \sum_{i=1}^2 (m_i - m_{i-1}) x_i}{m_2 - 1} - k_2 x_2, \\ \dots, & \dots \\ x_{N-2} = \frac{(1+k_{N-3}) \sum_{i=1}^{N-3} (m_i - m_{i-1}) x_i}{m_{N-3} - 1} - k_{N-3} x_{N-3}, \\ x_{N-1} = \frac{(1+k_{N-2}) \sum_{i=1}^{N-2} (m_i - m_{i-1}) x_i}{m_{N-2} - 1} - k_{N-2} x_{N-2} \end{cases} \quad (5)$$

3 产生 N2 涡卷超混沌吸引子的分段线性函数 $g(y-x)$ 构造方法

由图 1 可知, 对于双涡卷超混沌吸引子, 它由两个涡卷运动和一个键带运动所组成^[12], 其对应的三个分段线性函数 $g(u) = m_1 u + 0.5(m_0 - m_1)[|u+x_1| - |u-x_1|]$ 如图 2 所示, 图中的负斜率 m_0 对应一个键带区域, 正斜率 m_1 对应两个涡卷区域, x_1 为转折点值, $x_{eq, i} (i = 0, 1)$ 为平衡点值, 它是方程 $u = g(u)$ 的解. 可以看出双涡卷超混沌吸引子在相空间中的主要特点是涡卷与键带保持相互间置.

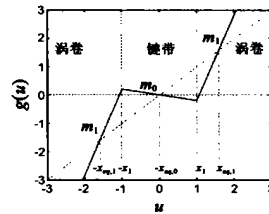


图 2 双涡卷超混沌吸引子的 3 个分段线性奇函数

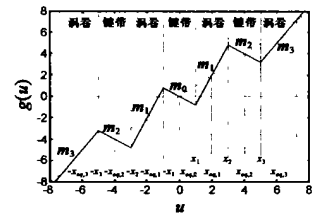


图 3 42 涡卷超混沌吸引子的 7 个分段线性奇函数

基于涡卷与键带保持相互间置的特点, 本文可构造产生 N_2 涡卷超混沌吸引子的 $2N-1$ 个分段线性奇函数 $g(u) =$

$m_{N-1}(u) + 0.5 \sum_{i=1}^{N-1} (m_i - m_0) \#(|u+x_i| - |u-x_i|)$. 为不失一般性, 以产生 42 涡卷超混沌吸引子为例, 其 7 个分段线性奇函数如图 3 所示. 图中的负斜率 m_0, m_2 对应三个键带区域, 而正斜率 m_1, m_3 则对应四个涡卷区域, $x_i (i = 1, 2, 3)$ 为转折点值, $x_{eq, i} (i = 0, 1, 2, 3)$ 为平衡点值, 它是方程 $u = g(u)$ 的解. 根据图 3, 我们可总结出构造多个分段线性奇函数 $g(u)$ 的几个主要特点如下: (1) 在相空间中, N_2 涡卷超混沌吸引子的 N 个涡卷和 $N-1$ 个键带保持相互间置, 并且在最外面的两个区域一定是涡卷存在的区域; (2) 负斜率 m_i 对应于键带, 正斜率 m_j 对应于涡卷; (3) 转折点 $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 与平衡点 $x_{eq, i} (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 保持相互间置; (4) 产生 N_2 涡卷超混沌吸引子需要构造 $2N-1$ 个分段线性奇函数, 其中 N 个正斜率段对应于 N 个涡卷, $N-1$ 个负斜率段对应于 $N-1$ 个键带.

4 递推参数值的计算

为了使平衡点 $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 与转折点 $x_{eq, i} (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 能保持相互间置, 它们之间的关系应满足式(4), 式中 $k_i (i = 1, 2, 3, \dots) \in 1$, 其大小决定了各个线性区间中的每个平衡点 $x_{eq, i} (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 与两个相邻转折点 $x_i, x_{i+1} (i = 1, 2, 3, \dots)$ 之间距离的比值 $(x_{i+1} - x_{eq, i}) / (x_{eq, i} - x_i) = k_i (i = 1, 2, 3, \dots)$. 需要说明的是, 能产生 $N2$ 涡卷超混沌吸引子的各个 $k_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 的取值不是惟一的. 特别是当 $k_i (i = 1, 2, 3, \dots) = 1$ 时, 能使各个平衡点正好位于相邻两个转折点的正中间, 下面我们将选取各个 $k_i (i = 1, 2, 3, \dots) = 1$ 作为一个实例来计算递推参数. 注意到第一个转折点的选取带有任意性, 我们取归一化参数 $x_1 = 1$. 计算机数值模拟结果表明, 在满足负斜率 m_1 对应于键带, 正斜率 m_2 对应于涡卷的前提下, 能产生 $N2$ 涡卷超混沌吸引子的各个 $m_k (k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1)$ 的选取结果也不是惟一的. 作为一个例子, 我们将选取各个负斜率 m_1 的值均为 -0.18 , 各个正斜率 m_2 的值均为 $+0.18$, 而最外面区域正斜率的值 $m_{N-1} = 1.18$.

上述有关 $k_i (i = 1, 2, 3, \dots) = 1$ 以及各个斜率 $m_k (k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1)$ 的选取可使 $N2$ 涡卷超混沌吸引子具有如下两个特点: (1) 由于各个平衡点正好位于相邻两个转折点的正中间, 加之各个负斜率具有相同的取值, 各个正斜率也具有相同的取值, 超混沌吸引子中的各个涡卷大小能基本保持相同; (2) 取 $x_1 = 1, 2N-1$ 个分段线性奇函数中各个转折点和平衡点的值可为整数. 基于上述考虑, 我们可确定在 MCK 电路中产生 $3 \sim 12$ 涡卷超混沌吸引子的各组参数分别为

(1) 产生 3 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 3$)

$$\begin{cases} [k_1] = [1] \\ [m_0, m_1, m_2] = [2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2] = [1, 3] \end{cases} \quad (6)$$

(2) 产生 4 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 4$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2] = [1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3] = [-0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3] = [1, 3, 5] \end{cases} \quad (7)$$

(3) 产生 5 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 5$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3] = [1, 1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4] = [2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3, x_4] = [1, 3, 5, 7] \end{cases} \quad (8)$$

(4) 产生 6 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 6$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, k_4] = [1, 1, 1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5] \\ = [-0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = [1, 3, 5, 7, 9] \end{cases} \quad (9)$$

(5) 产生 7 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 7$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5] = [1, 1, 1, 1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6] \\ = [2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = [1, 3, 5, 7, 9, 11] \end{cases} \quad (10)$$

(6) 产生 8 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 8$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6] = [1, 1, 1, 1, 1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7] \\ = [-0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7] = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] \end{cases} \quad (11)$$

(7) 产生 9 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 9$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8] \\ = [2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8] = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15] \end{cases} \quad (12)$$

(8) 产生 10 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 10$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9] \\ = [-0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9] = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17] \end{cases} \quad (13)$$

(9) 产生 11 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 11$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}] \\ = [2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}] \\ = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19] \end{cases} \quad (14)$$

(10) 产生 12 涡卷超混沌吸引子的递推参数 ($N = 12$)

$$\begin{cases} [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \\ [m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}] \\ = [-0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 2.18, -0.18, 1.18] \\ [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}] \\ = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21] \end{cases} \quad (15)$$

5 3~12 涡卷超混沌吸引子的计算机模拟结果

利用式(6)~(15)各式中所提供的递推参数, 得 3~12 涡卷超混沌吸引子计算机模拟结果如图 4 所示.

6 多涡卷超混沌吸引子的单向耦合同步

基于李雅普诺夫稳定性理论, 我们研究多涡卷超混沌吸引子的同步问题. 以 6 涡卷 MCK 超混沌吸引子为例, 其驱动系统的状态方程为

$$\begin{cases} dx^{(1)}/dS = A[g(y^{(1)} - x^{(1)}) - z^{(1)}] \\ dy^{(1)}/dS = B[-g(y^{(1)} - x^{(1)}) - w^{(1)}] \\ dz^{(1)}/dS = x^{(1)} + z^{(1)} \\ dw^{(1)}/dS = Cy^{(1)} \end{cases} \quad (16)$$

将驱动系统的状态变量 $[x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, w^{(1)}]$ 单向耦合到响应系统, 设耦合系数为 $[D_x, D_y, D_z, D_w]$, 响应系统的状态方程为

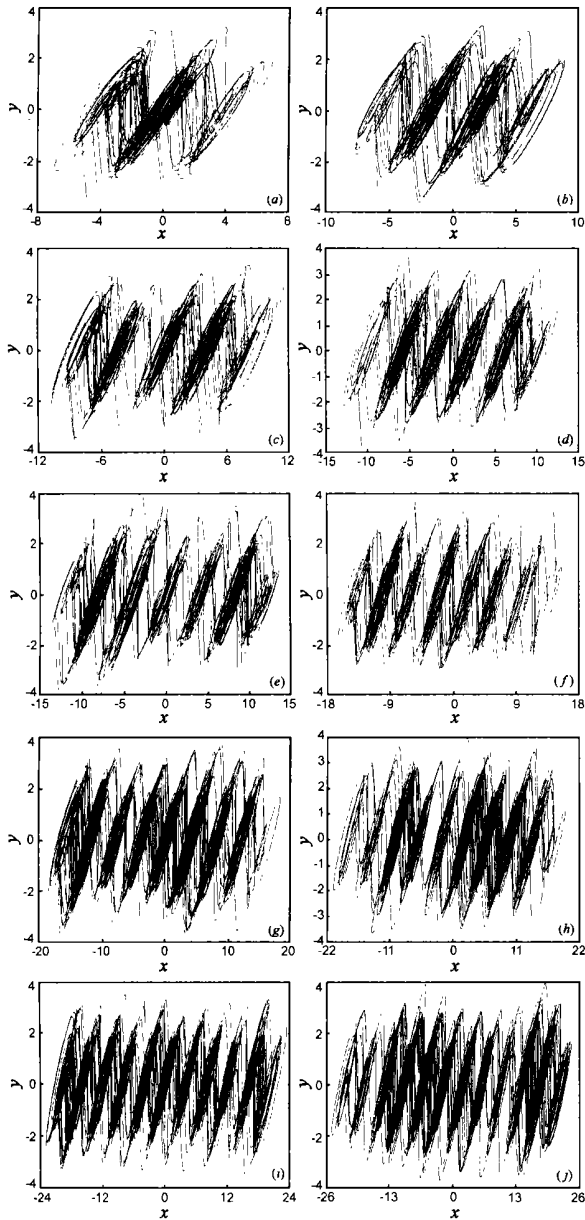


图 4 3~ 12 涡卷超混沌吸引子的计算机模拟结果

$$\begin{cases} dx^{(2)}/dS = A[g(y^{(2)} - x^{(2)}) - z^{(2)}] + D_x(x^{(1)} - x^{(2)}) \\ dy^{(2)}/dS = B[-g(y^{(2)} - x^{(2)} - w^{(2)})] + D_y(y^{(1)} - y^{(2)}) \\ dz^{(2)}/dS = x^{(2)} + z^{(2)} + D_z(z^{(1)} - z^{(2)}) \\ dw^{(2)}/dS = C y^{(2)} + D_w(w^{(1)} - w^{(2)}) \end{cases} \quad (17)$$

$g(y^{(j)} - x^{(j)}) (j = 1, 2)$ 为在两个系统中产生 6 涡卷的 11 个分段线性奇函数, 如式(2)所示 ($N = 6$), 其各个线性区间的斜率 $m_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 及各个转折点值 $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 如式(9)所示. 由于式(2)为分段线性奇函数, 我们有^[13]

$$\begin{aligned} & g(y^{(1)} - x^{(1)}) - g(y^{(2)} - x^{(2)}) \\ &= m[(y^{(1)} - x^{(1)}) - (y^{(2)} - x^{(2)})] \\ &= m[(y^{(1)} - y^{(2)}) - (x^{(1)} - x^{(2)})] \\ &= m[e_y - e_x] \end{aligned} \quad (18)$$

式中 m 为变参数^[13], 满足 $m_a F m F m_b$, 其中 $m_a = -0.8$, $m_b = 2.8$. 式(16)减去式(17), 得误差方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -(D_x + Am)e_x + Ame_y - Ae_z \\ \dot{e}_y = Bme_x - (D_y + Bm)e_y - Be_w \\ \dot{e}_z = e_x + (1 - D_z)e_z \\ \dot{e}_w = Ce_y - D_w e_w \end{cases} \quad (19)$$

上式中 $e_x = x^{(1)} - x^{(2)}$, $e_y = y^{(1)} - y^{(2)}$, $e_z = z^{(1)} - z^{(2)}$, $e_w = w^{(1)} - w^{(2)}$ 为驱动系统式(16)与响应系统式(17)之间的误差信号.

选取 Lyapunov 函数

$$E = \frac{A}{2} e_x^2 + \frac{B}{2} e_y^2 + \frac{C}{2} e_z^2 + \frac{D}{2} e_w^2 \quad (20)$$

式中 A, B, C, D 为 4 个正的待定常数, 对式(20)求导, 得

$$\dot{E} = Ae_x \dot{e}_x + Be_y \dot{e}_y + Ce_z \dot{e}_z + De_w \dot{e}_w \quad (21)$$

将式(19)代入式(21), 经整理后得

$$\begin{aligned} \dot{E} &= (Am + Bm) e_x e_y - (A - C) e_x e_z \\ &\quad - (B - DC) e_y e_w - A(D_x + Am) e_x^2 \\ &\quad - B(D_y + Bm) e_y^2 + C(1 - D_z) e_z^2 - DD_w e_w^2 \end{aligned} \quad (22)$$

选取 $C = A, DC = B, A = (2/A), C = 2, B = (2/B), D = (2/C)$, 则可找到一个 Lyapunov 函数

$$E = (1/A) e_x^2 + (1/B) e_y^2 + e_z^2 + (1/C) e_w^2 \quad (23)$$

使得

$$\begin{aligned} \dot{E} &= 4me_x e_y - \frac{2}{A}(D_x + Am) e_x^2 - \frac{2}{B}(D_y + Bm) e_y^2 \\ &\quad + 2(1 - D_z) e_z^2 - \frac{2}{C} D_w e_w^2 \\ &= - (2e_x - me_y)^2 - \left(\frac{2}{A} D_x + 2m - 4\right) e_x^2 \\ &\quad - \left(\frac{2}{B} D_y + 2m - m^2\right) e_y^2 + 2(1 - D_z) e_z^2 - \frac{2}{C} D_w e_w^2 \end{aligned} \quad (24)$$

由式(24), 若下列不等式成立

$$\begin{cases} D_x > A(2 - m) \\ D_y > (B/2)(m^2 - 2m) \\ D_z > 1 \\ D_w > 0 \end{cases} \quad (25)$$

则 \dot{E} 定负, 由 Lyapunov 稳定性定理^[14], 可知误差系统式(19)稳定, 故 $[e_x, e_y, e_z, e_w] \rightarrow 0$, 因此驱动系统式(16)与响应系统式(17)可实现同步.

另一方面, 由于变参数 m 满足 $m_a F m F m_b$, 其中 $m_a = -0.8$, $m_b = 2.8$, 故对于 $P \in I [m_a, m_b]$, 式(25)中的 $(2 - m)$ 和 $(m^2 - m)$ 分别有最大值 $(2 - m)_{\max} = (2 - m_a)$ 和 $(m^2 - m)_{\max} = (m_b^2 - m_b)$. 因此, 若下述不等式满足

$$\begin{cases} D_x > A(2 - m_a) \\ D_y > (B/2)(m_b^2 - 2m_b) \\ D_z > 1 \\ D_w > 0 \end{cases} \quad (26)$$

则必有式(25)成立, 从而使驱动系统式(16)与响应系统式(17)实现同步. 基于上述分析, 我们提出有关系系统式(16)和式(17)单向耦合同步的定理:

定理 设 $X^{(1)} = \{x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, w^{(1)}\}$, $X^{(2)} = \{x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}, w^{(2)}\}$, 初始条件 $X^{(1)}(0)$ 、 $X^{(2)}(0)$ 位于相同的吸引域, 将式(16)的状态变量 $x^{(1)}$ 、 $y^{(1)}$ 、 $z^{(1)}$ 、 $w^{(1)}$ 单向耦合到式(17), 若耦合系数分别满足 $D_x > A(2 - m_a)$, $D_y > (B/2)(m_b^2 - 2m_b)$, $D_z > 1$, $D_w > 0$, 则响应系统式(17)与驱动系统式(16)可实现同步, $X^{(2)} \approx X^{(1)}$.

最后, 作为本定理具体应用的一个典型实例, 对于 6 涡卷超混沌吸引子, 有: $m_a = -0.18$, $m_b = 21.8$, $A = 2$, $B = 20$, $C = 11.5$, 经计算可得: $(2 - m_a) = 51.6$, $(B/2)(m_b^2 - 2m_b) = 221.4$, 现取 $D_x = 6$, $D_y = 25$, $D_z = 2$, $D_w = 1$, 使得式(25)成立, 驱动系统式(17)与响应系统式(16)可实现同步, 其仿真结果如图 5 所示.

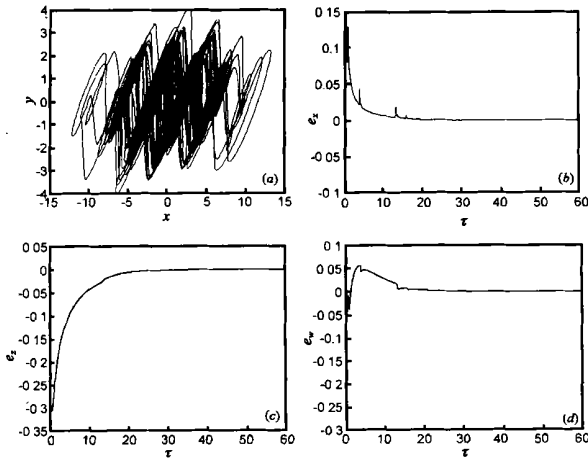


图 5 $D_x = 6$, $D_y = 25$, $D_z = 2$, $D_w = 1$ 时 6 涡卷超混沌吸引子同步的数值模拟

7 结论

提出了一种产生 $N2$ 涡卷超混沌吸引子的新方法. 通过构造一个具有 $2N - 1$ 个分段线性奇函数, 利用导出的递推公式, 可计算出该函数中的各个递推参数, 从而在四阶 MCK 电路中产生 $N2$ 涡卷超混沌吸引子. 构造准则是使涡卷与键带之间以及平衡点与转折点之间均保持相互间置, 正斜率对应于涡卷而负斜率则对应于键带. 文中以各个平衡点正好位于相邻两个转折点的正中间为典型实例, 分析了 $N2$ 涡卷超混沌吸引子的产生问题, 并利用递推公式计算了产生 3~12 涡卷超混沌吸引子的各组参数, 在此基础上给出了计算机数值模拟结果. 基于李雅普诺夫稳定性理论, 本文还研究了 $N2$ 涡卷超混沌吸引子的单向耦合同步问题, 分析了响应系统与驱动系统实现单向耦合同步时耦合系数 $[D_x, D_y, D_z, D_w]$ 所应满足的条件. 有关此类系统的电路实现及其在保密通信中的应用问题, 我们将另文讨论.

参考文献:

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Dedieu H, Kennedy M P, Hasler M. Chaos shift keying: Modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuit

- [3] Kolumban G, Kennedy M P, Chua L O. The role of synchronization in digital communications using chaos[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. (part 2: Analog and Digital), 1993, 40(10): 634-643.
- [4] Yang T, Wu C W, Chua L O. Cryptography based on chaotic systems[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. (part 2: Analog and Digital), 1997, 44(5): 469-472.
- [5] Matsumoto T, Chua L O, Komuro M. The double scroll[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. (part 2: Analog and Digital), 1985, 32(8): 798-817.
- [6] Suykens J A K, Vandewalle J. Generation of n double scrolls ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$)[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. (part 2: Analog and Digital), 1993, 40(11): 861-867.
- [7] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J. Experimental confirmation of \mathcal{A} and \mathcal{B} scroll attractors from a generalized Chua's circuit[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. (part 2: Analog and Digital), 2000, 47(3): 425-429.
- [8] 禹思敏, 丘水生, 林清华. 多涡卷混沌吸引子研究的新结果[J]. 中国科学(E 辑), 2003, 33(4): 365-374.
- [9] Tang W K S, Zhong G Q, Chen G, Man K F. Generation of $N2$ scroll attractors via sine function[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. (part 2: Analog and Digital), 2001, 48(11): 1369-1372.
- [10] Yin Y Z. Experimental demonstration of chaotic synchronization in the modified Chua's oscillators[J]. Int. J. Bifurc. Chaos, 1997, 7(6): 1401-1410.
- [11] Matsumoto T, Chua L O, Kobayashi K. Hyperchaos: Laboratory experiment and numerical confirmation[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. (part 2: Analog and Digital), 1986, 33(11): 1143-1147.
- [12] Qiu S S. Study of existence and structure of chaotic attractors[A]. Proc. Int. Symp. Nonl. Theory Appl[C]. Xi'an, 2002. 2: 783-786.
- [13] Jiang G P, Tang W K S. A global synchronization criterion for coupled chaotic systems via unidirectional linear error feedback approach[J]. Int. J. Bifurc. Chaos, 2002, 12(10): 2239-2253.
- [14] 许浚炎. 常微分方程稳定性理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1961.

作者简介:



禹思敏 男, 1957 年 5 月出生于湖南省双峰县, 博士, 教授, 2001 年在华南理工大学电子与信息学院获电路与系统专业博士学位, 现分别在广东工业大学信息工程学院和自动化学院任教, 目前主要从事混沌理论与保密通信、通信理论与技术、数字电视与高清晰度电视等方面的教学与科研工作.

丘水生 男, 1939 年出生于广东省平远县, 教授, 博士生导师, 中国电子学会非线性电路与系统专业委员会主任委员, 电子与信息学报编委, 1966 年华南工学院非线性振荡理论专业研究生毕业, 1984~1986 年为加拿大阿尔伯特大学访问学者, 1990~1991 年先后为美国波特兰州立大学、加拿大阿尔伯特大学访问教授, 目前在华南理工大学电子与信息学院从事非线性电路与功率电子学、混沌理论与保密通信方面的教学、科研工作.